Class : S.V.
Matière : Math

Exercice I(3points)

Donner, **en justifiant**, la seule réponse correcte à chacune des questions suivantes:

№	Questions	a	b	c	d
1	f et g deux fonctions dérivables dans IR . on donne f(5)=2; $f'(5)=3$ et $g'(2)=6$ $alors\,(gof)'(5)=$	36	6	18	12
2	Soit la fonction f définie par $f(x)=x^2-4x+3$ sur l'intervalle I=$[-1;3]$ alors f(I) =	$[0;8]$	$]0;8]$	$[-1;8]$	$[-1;0]$
3	L'équation f(x)=$2x^5+3x^3-8=0$ admet une seule racine dans l'intervalle	$[0;1]$	$[1;2]$	$[2;3]$	$[-1;0]$

Exercice II (10points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère les points A, et B d'affixes respectives a=+1 et b=-1 . A tout point M d'affixe z ; z$\neq$ -1 , on associe le point M' d'affixe $z'=\dfrac{z-1}{z+1}$= f(z).

1) Résoudre z'=z.

2) a- Montrer que, pour tout nombre complexe z$\neq$ -1 : (z'-1)(z+1)=-2.

b- En déduire une relation entre $|z'-1|$ et $|z+1|$, puis entre arg(z'-1) et arg(z+1) pour tout nombre complexe z$\neq$ -1

Traduire ces deux relations en termes de distances et d'angles.

3) Montrer que si M appartient au cercle (C) de centre B et de rayon 2 alors M' appartient à un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

4) Soit le point P d'affixe p= -2+i $\sqrt{3}$.

a- Déterminer la forme exponentielle de(p+1) .

b- Montrer que le point P appartient au cercle (C) .

c- Calculer p' affixe de P' image de P par f

d- Soit Q le point d'affixe q=$-\,\overline{p}$ où $\overline{p}$ est le conjugué de p . Montrer que les points A,P' et Q sont alignés .

Exercice III (7points)

On donne deux fonctions f et g telles que f(x) = x + $\sqrt{x}$ et g(x) = $\dfrac{x-1}{x+1}$.

1- Calculer fog ($-\dfrac{5}{3}$) .

2- Préciser le domaine de définition de gof.

3- Calculer (gof)' (1) .

4- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x)$.

5-a) Dresser le tableau de variations de f .

www.tarbaweya.org

b) Calculer f(1) , f(4) puis tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé

6- Montrer que f admet sur [0;∞[une fonction réciproque f^{-1}.

7- Sans trouver l'expression de f^{-1}, Calculer $\left(f^{-1}\right)'(2)$.

8- Tracer $\left(C_{f^{-1}}\right)$ dans le même repère que f.

9- Soit k une fonction définie sur [0;∞[par $k(x)=\left(\dfrac{-1+\sqrt{4x+1}}{2}\right)^2$.

Calculer (kof)(x) et déduire l'expression de la fonction réciproque f^{-1}.

Bon tarvail

www.tarbaweya.org

Class : S.V.
Matière : Math

Barème S.V Math décembre 2010 Complexe fonction reciproque	Note
Exercice I 1) $(gof)'(5)=g'(f(5)).f'(5)=g'(2)\times 3=6\times 3=18$	1
2) $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & -1 & 2 & 3 & +\infty \\ \hline f'(x) & - & & 0 & + & \\ \hline f & & 8 \rightarrow & -1 & 0 \rightarrow & \end{array}$ I= $[-1;+3]$ $f(I)=[-1;+8]$	1
3) f(-1) $\prec 0$ f(0) $\prec 0$ f(1) $\prec 0$ f(2) $\succ 0$ f(3) $\succ 0$ Donc f(1)f(2) $\prec 0$ et f st. Monotone donc il existe α unique $1\prec\alpha\prec 2$ f(α)=0	1
Exercice II 1) z'=z alors z^2= -1 donc z= -i ou z= +i	1
2) a- z'-1 = $\dfrac{-2}{z+1}$ donc (z'-1)(z+1)= -2	1/2
b- $\|z'-1\|\times\|z+1\|=2$ et arg(z'-1)+arg(z+1) = π (2π) M'A×MB= 2 et $(\vec{u};\overrightarrow{M'A})+(\vec{u};\overrightarrow{MB})=\pi(2\pi)$	2
3) si M∈C(B;2) alors MB=2 donc M'A=1 ce qui donne M'∈C(A;1)	11/2
4) a- p+1= $-1+i\sqrt{3}=2e^{\frac{i2\pi}{3}}$	1
b- P∈C(B;2) ssi PB= 2 ssi $\|z_P-z_B\|=2$ mais $\|z_P-z_B\|=\|p+1\|=2$	1
c- f(p)= $\dfrac{p-1}{p+1}=\dfrac{3-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}=\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}=p'$	1

www.tarbaweya.org

d- $Q(2+i\sqrt{3})$ — 1

$$Z_{\overrightarrow{AP'}} = Z_{P'} - Z_A = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad Z_{\overrightarrow{AQ}} = Z_Q - Z_A = 1 + i\sqrt{3}$$

$2\,Z_{\overrightarrow{AP'}} = Z_{\overrightarrow{AQ}}$ ce qui donne A, P' et Q sont alignées

Exercice III — 1/2

1)(fog)(-5/3)= f(4)= 6

2) $D_{gof}=\{x\in D_f;\ f(x)\in D_g\}=\{x\geq 0\ ;\ g(x)\neq -1\}=[0;\ +\infty[$. — 1

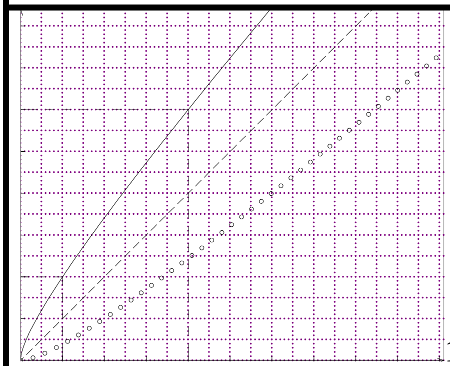
3) (gof)'(1) =g'(f(1))×f'(1)= (2/9)×(3/2)= 1/3. — 1

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(gof)(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et g continue . — 1

$\lim\limits_{x\to+\infty}(fog)(x) = \lim\limits_{x\to+1} f(x) = 2$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +1$ et f continue .

5) $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \succ 0$ — 1

x	0	1	4	+∞
f'(x)	+			
f(x)	0	2	6	+∞



1+1/2

6) f continue st croissante sur [0;+∞[alors f admet une fonction réciproque . — 1/2

7) $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(x)}$; $y = f(x) = 2$ donc x = 1 — 1/2

Et $\left(f^{-1}\right)'(2) = \dfrac{1}{f'(1)} = \dfrac{2}{3}$

6) (kof)(x) = x donc $f^{-1}=k$ — 1

Car (kof)(x)=k(f(x))= $\left(\dfrac{-1+\sqrt{4x+4\sqrt{x}+1}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+\sqrt{\left(2\sqrt{x}+1\right)^2}}{2}\right)^2 = \left(\dfrac{-1+2\sqrt{x}+1}{2}\right)^2 = x$

www.tarbaweya.org

www.tarbaweya.org