Matière : Math Classe : S.V.

Exercice I(5points)

Donner, **en justifiant**, la seule réponse correcte à chacune des questions suivantes:

	Questions	réponses			
		a	b	c	d
1	On définit sur IR une fonction g par $g(x) = x^2 - 2x$. L'image par g de l'intervalle [0 ; 2] est	[0 ; 4]	[– 1 ; 4]	[–1 ; 0]	[-1;+∞[
2	Soit $f(x)=3x+5$ et $g(x)=x^2+1$ alors (gof + fog) (0) =	34	67	76	5
3	Si arg(z-5i)=$\frac{\pi}{6}$ alors $\arg\left(i\times\bar{z}-5\right)$=	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{-\pi}{3}$
4	z est un nombre complexe tel que $\lvert z\rvert=2$. $\left\lvert iz+\frac{2i}{\bar{z}}\right\rvert=$	2	1	0	3
5	$\left(e^{i\frac{\pi}{8}}+e^{-i\frac{\pi}{8}}\right)^2$ =	4	2+$\sqrt{2}$	1	2

Exercice II(5 points)

f et g sont deux fonctions telles que $f(x) = \frac{x^2}{x-2}$ et $g(x) = -4 + 2\sqrt{x-1}$.

Soit h = f o g.

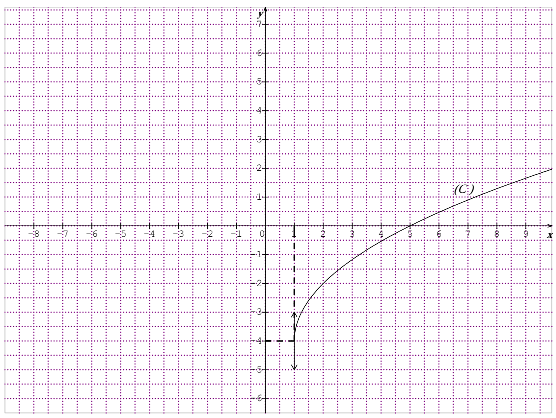
Sans trouver h(x)

1- Trouver le domaine de définition de h.

2- Calculer h'(17) et h(17) puis en déduire l'équation de la tangente à (C_h) au point d'abscisse 17 .

3- Montrer que g admet une fonction réciproque T;

Dresser le tableau de variations de T et expliciter T(x).



4- On donne la courbe représentative (C) de g, Reproduire (C) et tracer la courbe représentative (C') de T.

Exercice III (4 points)

On définit sur IR une fonction f par $f(x) = 3x^5 + 5x^3 - 1$.

1-Dresser le tableau de variations de f , déterminer f([-1;+∞[)

2- Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une seule racine réelle k telle que 0,54<k<0,56.

3- Soit g la fonction réciproque de f. calculer f(1) puis en déduire g'(7).

Exercice IV(6 points)

On considère les points A d'affixe $z_A = 1$ et B d'affixe $z_B = 3 + 2i$.

à tout point M distinct de A et d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' définie par: $z' = \frac{z-1+2i}{z-1}$.

1- Dans le cas particulier où z = 3, vérifier que $z' = \sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}$ puis vérifier que $(z')^{10}$ est imaginaire pur.

2-a. Pour $z\neq 1$, calculer le produit $(z' - 1)(z - 1)$.

b. En déduire que, pour tout point M distinct de A, on a :

$$AM \times AM' = 2 \text{ et } (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) + (\vec{u}, \overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \text{ k : entier.}$$

3- Prouver que, si M décrit un cercle (C) de centre A passant par O, alors M'décrit un cercle fixe.

4-a. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

b. Démontrer que si M est un point, autre que A, de la droite (AB) alors M' appartient à (AB).

Bon travail

Matière : Math
Classe : S.V.

Barème SV (1ème épreuve

<table>
<tr><td>Exercices</td><td>Solution-Mathématiques</td></tr>
<tr><td rowspan="5">I</td><td>1) On dresse le tableau de variations de g ; on aura l'image par g de [0 ; 2] est [-1 ; 0], on choisit (c).</td></tr>
<tr><td>2) (gof + fog)(0) = g(f(0)) + f(g(0)) = g(5) + f(1) = 26 + 8 = 34. On choisit (a)</td></tr>
<tr><td>3) $i\bar{z} - 5 = i(\bar{z} + 5i) = i(\overline{z - 5i})$; $\arg(i\bar{z} - 5) = \frac{\pi}{2} - \arg(z - 5i) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$
On choisit (c)</td></tr>
<tr><td>4) $iz + \frac{2i}{\bar{z}} = \frac{iz\bar{z}+2i}{\bar{z}} = i\left(\frac{|z|^2+2}{\bar{z}}\right) = i(\frac{6}{\bar{z}})$; $\left|iz + \frac{2i}{\bar{z}}\right| = \frac{6}{2} = 3$; on choisit (d)</td></tr>
<tr><td>5) $\left(e^{\frac{i\pi}{8}} + e^{\frac{-i\pi}{8}}\right)^2 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 = \sqrt{2} + 2$; on choisit (b)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">II</td><td>1) Il faut que $x \in D_g$ et $g(x) \in D_f$; $x \geq 1$ et $-4 + 2\sqrt{x-1} \neq 2$
$2\sqrt{x-1} \neq 6$; $\sqrt{x-1} \neq 3$; $x \neq 10$, $D_h = [1\,;10[\,\cup\,]10\,;+\infty[$</td></tr>
<tr><td>2) h'(17) = f'(g(17)).g'(17) = f'(4).g'(17) = 0
h(17) = f(g(17)) = f(4) = 8 ; y – 8 = 0 ; y = 8.</td></tr>
<tr><td>3) g admet une fonction réciproque car elle est monotone sur $[1;+\infty[$
<table><tr><td>x</td><td>-4 $+\infty$</td></tr><tr><td>T'(x)</td><td>+</td></tr><tr><td>T(x)</td><td>1 ↗ $+\infty$</td></tr></table>y = $-4 + 2\sqrt{x-1}$; y + 4 = $2\sqrt{x-1}$; $x - 1 = \frac{1}{4}(y+4)^2$; $x = \frac{1}{4}(y+4)^2 + 1$</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>$T(x) = \frac{x^2+8x+20}{4}$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>4) (C’) est la symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice d’équation
y = x.</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="3">III</td><td>1) f’(x) = $15x^4 + 15x^2 = 15x^2(x^2+1)$; f’(x) = 0 ; pour x = 0.
f est une fonction continue et monotone sur $[-1;+\infty[$
<table>
<tr><td>x</td><td>-1   0 $+\infty$</td></tr>
<tr><td>T’(x)</td><td>+   0   +</td></tr>
<tr><td>T(x)</td><td>-9   -1 $+\infty$</td></tr>
</table>
$f([-1\,;+\infty[= [-9\ ;+\infty[$</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2) La courbe de f passe de -9 à $+\infty$ donc elle doit couper l’axe des x en un seul point d’abscisse k ; alors l’équation f(x) = 0 possède une solution unique.
f(0,54) < 0 et f(0,56) > 0 alors 0,54 < k < 0,56</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>3) f(1) = 7 ; g’(7) = $\frac{1}{f'(x)}$; où f(x) = 7 (alors x = 1) ; g’(7) = $\frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{30}$</td><td>1</td></tr>
<tr><td rowspan="7">IV</td><td colspan="1">1) Pour z = 3 on aura z’ = 1 + i = $\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$; arg (z'^{10}) = 10 arg(z’) = $\frac{5\pi}{2}$; ce qui démontre que z'^{10} est imaginaire pur.</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>2) a) (z’-1)(z-1) = (z-1+2i-z+1) = 2i</td><td>1</td></tr>
<tr><td>2) b) $(z'-z_A)(z-z_A) = 2i$; $|(z'-1)(z'-1)| = AM \times AM' = 2$
arg[(z’-1)(z-1)] = $\frac{\pi}{4}$; $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) + (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$</td><td>1 ½</td></tr>
<tr><td>3) Si AM = OA = 1 alors AM’ = 2 ; M’ décrit alors le cercle de centre A de rayon 2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>4) a) $(\vec{u};\overrightarrow{AB}) = \arg(z_{\overrightarrow{AB}}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$</td><td>½</td></tr>
<tr><td>4) b) Si M ∈ (AB) alors $(\vec{u};\overrightarrow{AM}) = \frac{\pi}{4}$
$(\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} - (\vec{u}\,;\overrightarrow{AM'}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$; alors M’∈ (AB).</td><td>½</td></tr>
</table>