مسابقة رياضيات

الصف:SV

I choisir la bonne réponse en justifiant

a) Le nombre complexe “i^{28}” est égal à:

i	-1	1

b) La somme: $i^0 + i^1 + i^2 + \ldots\ldots + i^{11}$ est égal à:

-i	0	-1

c) Un argument de $\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}$ est:

$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{-\pi}{4}$

d) Le nombre complexe $(i-1)^4$ est:

nul	Imaginaire pur	réel

e) Pour $Z=\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ on a:Z^{14}=

-1	-i	+i

II. le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{U},\vec{V})$.on designe par A, B et C les points D’affixes respectives: $Z_A=4+\frac{5}{2}i$;$Z_B=4-\frac{5}{2}i$ et$Z_C=2+\frac{3}{2}i$

1) Placer les points A, B et C dans le repère.
2) a) Ecrire $\frac{z_B-z_C}{z_A-z_C}$ sous forme exponentielle.

   b) En déduire la nature du triangle ABC
3) (E) désigne l’ensemble des points M du plan dont l’affixe z vérifie la relation $|z-4|=\frac{5}{2}$
   a) Les points A, B, et C sont –ils des points de (E)?
   b) Déterminer la nature de (E).
   c) Déterminer les points de (E) dont l’affixe est réelle

III. On consdère la fonction f définie sur l’intervalle]-1; +∞[par : $f(x)=x-\frac{\ln(x+1)}{1+x}$ la courbe (C) représentative de f

1. Calculer f’(x) pour tout x de]-1; +∞[.
2. Pour tout x de]-1; +∞[,on pose $N(x)=(1+x)^2-1+\ln(1+x)$.vérifier que l’on définit ainsi une fonction strictement croissante sur]-1; +∞[.calculer N(0) .en déduire les variations def
3. Soit (D) la droite d’équation y=x calculer les coordonnées du point d’intersection de la courbe (C) et de la droite (D)
4. Démontrer que , x∈ [0; 4], alors f(x) ∈[0;4].

5. Tracer la droite (D) et la courbe (C)

IV. On considère la fonction f définie sur R par $f(x)=\frac{x}{e^x-x}$ .on note (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O,\vec{i},\vec{j})$, l'unité graphique est 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées.

Soit g la fonction définie sur R par : $g(x)=e^x-x-1$

1. Etudier les variations de la fonction g sur R. En déduire le signe de g(x).
2. Justifier que , pour tout x, (e^x-x) est strictement positif.
3. a) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ *et en* $-\infty$

   b) Interpréter graphiquement les résultats précédents.
4. a) Calculer f'(x)

   b) Etudier le sens de variations de f , puis dresser son tableau de variations.
5. Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
6. Etudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T) .
7. Tracer la droite (T) ,les asymptotes et la courbe (C).

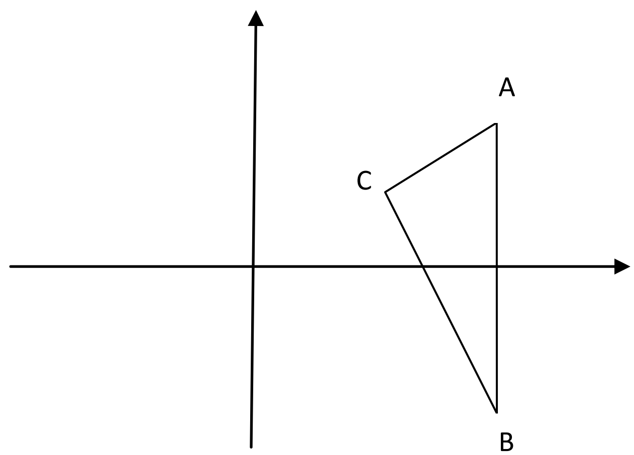
Corrigé et barème

Numéro:1(1 ¼ pts)

a	1	$\frac{1}{4}$(pts)
b	0	$\frac{1}{4}$(pts)
c	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{4}$(pts)
d	réel	$\frac{1}{4}$(pts)
e	-i	$\frac{1}{4}$(pts)

Numéro:2(5 ¾ pts)

1) $\frac{3}{4}(pts)$



2) a) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = -2i = 2e^{-i\frac{\pi}{2}}$ (1 pts)

b) $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}} = -2i$ d'où:$\left|\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}\right| = |-2i|$ ce qui donne$\frac{CB}{CA} = 2$

arg($\frac{z_{\overrightarrow{CB}}}{z_{\overrightarrow{CA}}}$) $= \arg(-2i)$ *, ce qui donne* $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$=$-\frac{\pi}{2}(2\pi)$ donc le triangle ABC est rectangle en C (1 pts)

3) a) $|Z_A - 4| = \left|\frac{5}{2}i\right| = \frac{5}{2}$ donc A est un point de (E). (1/4 pts)

$|Z_B - 4| = \left|-\frac{5}{2}i\right| = \frac{5}{2}$ donc B est un point de (E).(1/4 pts)

$|Z_C - 4| = \left|-2 + \frac{3}{2}i\right| = \frac{5}{2}$ donc C est un point de (E). (1/2 pts)

b) soit I le point d'affixe Z_I=4 ,on a $|z-4| = \frac{5}{2}$*, ce qui donne* $|Z_{\vec{M}} - Z_I| = |Z_{\overrightarrow{IM}}| = \frac{5}{2}$

donc IM=$\frac{5}{2}$ et par suite (E) est le cercle de centre I et de ryon $\frac{5}{2}$ (1 pts)

c) L'équation de (E) est $(x-4)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$.

les points de (E) d'affixe réelles sont les points d'intersection de (E) avec x'x d'où y=0 et par suite $(x-4)^2=\frac{25}{4}$, ce qui donne

$x-4=\frac{5}{2}\ ou\ x-4=-\frac{5}{2}\ par\ suite\ les\ points\ demandés\ sont\ les\ points\ p\left(\frac{13}{2}\ ;0\right) etQ(\frac{3}{2};0)$(1 pts)

<u>numero3(6 ¼ pts)</u>

1. $f'(x)=\frac{(1+x)^2-1+\ln(1+x)}{(1+x)^2}\ (\frac{1}{2}pts)$
2. $N'(x)=2(1+x)+\frac{1}{x+1}=\frac{2(1+x)^2+1}{x+1}$ on sait que x+1>0 ,car x>-1 et $2(1+x)^2+1>0$ sur I comme somme de nombres strictement positifs donc N est strictement croissante sur I (1 pts)
   *$N(0)=(1+0)^2$ -1+ln1=0 (1/4 pts)
   *on obtient le tableau de variations suivant:

x	-1		0	+∞
N'(x)		+		
N		-∞	0	+∞

$$\lim_{x\to-1} N(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} N(x)=+\infty$$

D'aprés le tableau de variation de N , on obtient que :

$$\left\{\begin{matrix} N(x)>0\ sur\ ]0;+\infty[\\ N(x)<0 sur\ ]-1;0[\\ N(0)=0\qquad\qquad ; \end{matrix}\right\}(1\ pts)$$

Or ,on a $f'(x)=\frac{N(x)}{(1+x)^2}$ le signe de f'(x) ne dépend que du signe de N(x)

Par suite

$$\left\{\begin{matrix} f'(x)>0\ sur\ ]0;+\infty[\ donc\ f\ est\ stictement\ croissante\ sur[0;+\infty[\\ f'(x)<0\ sur\ ]-1;0[\ donc\ fest\ strictement\ décroissante\ sur\ ]-1;0] \\ f'(0)=0 \end{matrix}\right\}(1\ pts)$$

3. On veut résoudre l'équation f(x)=x on a:
   $x-\frac{\ln(1+x)}{x+1}=x$
   $$\frac{\ln(1+x)}{x+1}=0$$
   Ln(1+x)=0

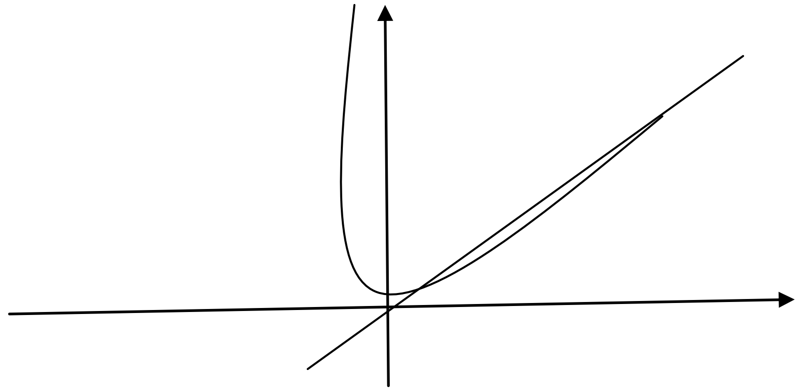
x+1=1

x=0 et f(0)=0 donc les coordonnées du points d'intersection sont (0;0)(1 pts)

4. 0$\leq x \leq 4 \leq donc\, f(0) \leq f(x) \leq f(4) or f(0) = 0\ \ et\ f(4) = 4 - \frac{ln5}{4} < 4\, car\ ln5 >$0

f(x)$\in [0;4]$(1 pts)

5.



(1/2 pts)

Numero4(6 ¾ pts)

1. g'(x)=e^x-1 donc g'(x)>0 pour x>0 et g'(x)<0 pour x<0

alors g est strictement croissante pour x>0 et strictemnt decroissante pour x<0 de plus g(0)=0 donc le minimum de g sur R vaut donc 0 alors g(x)≥ 0 sur R (1 ¼ pts)

2. On a g(x) ≥ 0 pour tout x de R

e^x-x-1 ≥ 0

e^x-x≥ 1>0 donc e^x-x>0(1/2 pts)

3. a)

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = 0 car \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty\ et \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}$$

$$= 0(\frac{1}{2}pts)$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^x - x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - 1} = -1 car \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = -1(\frac{1}{2}pts)$$

b) y=0 A.H au +∞ ety=-1 A.H au -∞(1/2 pts)

4) a) f'(x)=$\frac{e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$(1/2 pts)

x	-∞		1		+∞
f'(x)		+	0	-	

b) (1 pts)

f(x)	-1 ↗ $1e-$ 1 ↘ 0

5) y=f’(0)(x-0) +f(0) or f’(0)=1 et f(0)=0 donc y=x est l’équation de la tangente(1/2 pts)

6)f(x)-y=$\frac{x}{e^{x}-x}-x=\frac{x-xe^{x}+x^{2}}{e^{x}-x}e=\frac{-x(e^{x}-x-1)}{e^{x}-x}$

Pour x>0 la courbe est au dessous de(T)(1/2 pts)

Pour x<0 la courbe est au desu dessus de (T)(1/2 pts)

7)graphe(1/2 pt)