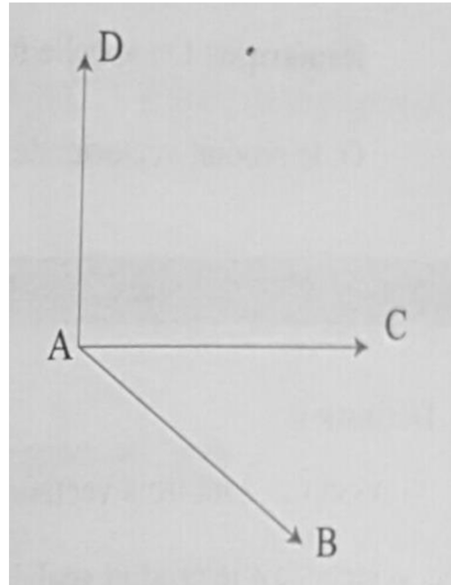
1. Produit vectoriel de deux vecteurs



A. Définition :

A, B et C sont trois points de l'espace.

a) Si A, B et C sont alignés alors

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

b) Si A, B et C sont non alignés, alors

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ tel que :

- $\overrightarrow{AD}$ est orthogonal au plan (ABC),
- Le trièdre $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est direct,
- $\|\overrightarrow{AD}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \sin \widehat{BAC}$.

B. Propriétés :

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace et A, B et C sont trois points de l'espace.

a) $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.

b) $\vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$.

c) $(\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u} \wedge \vec{v})$ (α réel).

d) $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w})$.

e) Si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

f) Si $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

g) $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ vaut deux fois la mesure de l'aire du triangle ABC.

h) Si $\vec{u} \wedge \vec{v}$ sont orthogonaux et unitaires, et si $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$, alors la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est directe.

i) Lorsque le point C se déplace sur un parallèle (D) à (AB), alors $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ne change pas.

j) Si le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormé direct, alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ X & Y & Z \\ X' & Y' & Z' \end{vmatrix}$

Avec $\vec{u}(X; Y; Z)$ et $\vec{v}(X'; Y'; Z')$.

k)

$$\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|}$$

2. Produit mixte de trois vecteurs

A. Définition :

Si $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont trois vecteurs pris dans cet ordre, alors le produit mixte de ces trois vecteurs est le produit scalaire de $\overrightarrow{v_1}$ par $(\overrightarrow{v_2} \wedge \overrightarrow{v_3})$.

B. Propriétés :

a) La valeur absolue du produit mixte de trois vecteurs est égale au volume du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs.

b) Le produit mixte de trois vecteurs ne change pas si on effectue sur ces vecteurs une permutation circulaire et change de signe si on effectue sur ces vecteurs une transposition.

c) Trois vecteurs de l'espace sont coplanaires si leur produit mixte est nul et réciproquement.

d) Si $\overrightarrow{V_1}(X_1; Y_1; Z_1)$, $\overrightarrow{V_2}(X_2; Y_2; Z_2)$, et $\overrightarrow{V_3}(X_3; Y_3; Z_3)$ alors :

$$[\, \overrightarrow{V_1}\, , \overrightarrow{V_2}\, , \overrightarrow{V_3}\,] = \overrightarrow{V_1}\big(\overrightarrow{V_2} \wedge \overrightarrow{V_3}\big) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}$$

`

L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'axes $x'Ox, y'Oy, z'Oz$.

$A(x_A, y_A, z_A)$ est un point fixe de l'espace,

$M(x; y; z)$ est un point variable.'

A. Droites de l'espace

1) Un vecteur directeur d'une droite donnée (D) est tout vecteur $\vec{v}(a; b; c)$ ayant la même direction que (D).
2) Un système d'équations paramétriques d'une droite (D) passant par A est obtenu en écrivant $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{tv}$ et qui donne $\begin{Bmatrix} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{Bmatrix}$

Les équations cartésiennes de (D) sont :

$$\frac{x - x_A}{a} = \frac{y - y_A}{b} = \frac{z - z_A}{c}$$

3) Deux droites sont parallèles si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Deux droites sont orthogonales si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Les coordonnées du point d'intersection de deux droites (D) et (D') sont les racines du système d'équations représentant l'intersection de (D) et (D').

B. Plans de l'espace

1) Un vecteur normal $\vec{n}\ (a; b; c)$ à un plan (P) est tout vecteur orthogonal à (P).
2) Pour écrire une équation cartésienne d'un plan (P), on a besoin d'un point fixe du plan (P) et d'un vecteur normal à ce plan. Si $A\ (x_A;\ y_A;\ z_A)$ est le point fixe de (P), $\vec{n}\ (a; b; c)$ est le vecteur normal de (P) et $M\ (x; y; z)$ un point variable de (P), alors une équation cartésienne de (P) est obtenue par $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$, qui donne une équation de la forme $ux + vy + wz + r = 0$ (u, v, w et r sont des réels).

3) Une équation du plan (xOy) est $z = 0$ $(\vec{k} \cdot \overrightarrow{OM} = 0)$.

Une équation du plan (xOz) est $y = 0$ $(\vec{j} \cdot \overrightarrow{OM} = 0)$.

Une équation du plan (yOz) est $x = 0$ $(\vec{i} \cdot \overrightarrow{OM} = 0)$.

4) Une équation du plan passant par un point fixe A et de vecteurs directeurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ est obtenue en écrivant $\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$.

5) Soit (P) :$ux + vy + wz + r = 0$ et (P') :$u'x + v'y + w'z + r' = 0$.

(P) est parallèle à (P') si $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'}$ $(u'\ v'w' \neq 0)$.

(P) est confondu avec (P') si $\frac{u}{u'} = \frac{v}{v'} = \frac{w}{w'} = \frac{r}{r'}$ $(u'\ v'\ w'r' \neq 0)$.

(P) est perpendiculaire à (P') si $uu' + vv' + ww' = 0$.

6) Soit (D) :$\begin{cases} x = at + x_A \\ y = bt + y_A \\ z = ct + z_A \end{cases}$ et (P) : $ux + vy + wz + r = 0$.

(D) est parallèle à (P) (ou contenue dans P) si $\vec{v}\ (a; b; c)$ et $\vec{u}\ (u, v, w)$ sont orthogonaux.

(D) est orthogonale à (P) si $\vec{v}\ (a; b; c)$ et $\vec{u}\ (u, v, w)$ sont colinéaires.

7) Pour écrire un système d'équations paramétriques de la droite d'intersection de deux plans on exprime deux variables parmi x, y ou z en fonction de la troisième variable considérée comme paramètre.

8) Les coordonnées du point d'intersection d'une droite (D) et d'un plan (P) sont les racines du système d'équations représentant l'intersection de (D) et (P).

9) La distance d'un point $A\ (x_A; y_A; z_A)$ au plan (P) d'équation $ux + vy + wz + r = 0$ est

$$d = \frac{|ux_A + vy_A + wz_A + r|}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}}$$

10) La distance d'un point $A\ (x_A, y_A, z_A)$ à une droite (D) est

$$d = \frac{\left|\vec{v} \wedge \overrightarrow{AB}\right|}{\|\vec{v}\|}$$

où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D) et B un point quelconque de (D).

11) L'angle aigu α de deux droites (D) et (D') est donné par

$$\cos\alpha = \frac{\left|\vec{v} \cdot \overrightarrow{v'}\right|}{\|\vec{v}\|\left\|\overrightarrow{v'}\right\|}$$

où $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v'}$ sont des vecteurs directeurs de (D) et (D') respectivement.

12) L'angle aigu β de deux plans (P) et (P') est donné par

$$\cos\beta = \frac{\left|\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'}\right|}{\|\vec{n}\|\left\|\overrightarrow{n'}\right\|}$$

Où $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont des vecteurs normaux de (P) et (P').

13) Soit α l'angle que forme une droite (D) avec un plan (P) et β le complément de α.

Pour calculer $\cos\alpha$ on commence par calculer

$$\cos\beta = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\|\|\vec{n}\|}$$

où $\vec{v}$ est un vecteur directeur de (D) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P). On a alors

$\sin\alpha = \cos\beta$ et $\cos\alpha = \sqrt{1 - \cos\beta}$ (car α et β sont aigus).