LOGARITHME NEPERIEN

1) DEFINITION

Rappel

La fonction exponentielle est une bijection de $\mathbb{R}$ sur] 0 ; +∞ [.

C'est-à-dire que pour tout $b \in]0 ; +\infty[$, il existe un unique réel a tel que $e^{a} = b$.
On note $a = \ln b$, ce qui se lit logarithme népérien de b . Ainsi à tout réel x strictement positif, on peut associer un unique réel noté ln (x).

Définition

On appelle **fonction logarithme népérien** la fonction qui à un réel x strictement positif, fait correspondre ln (x) . $$\ln : \begin{array}{ccc}]0 ; +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln x \end{array}$$	On écrit souvent ln x au lieu de ln (x)

Remarques :

- La fonction ln est une bijection de] 0 ; +∞ [dans $\mathbb{R}$.
- L'équivalence $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ y = \ln x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \in \mathbb{R} \\ e^{y} = x \end{cases}$ traduit le fait que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre.

Propriétés

• Pour tout réel x strictement positif , on a $e^{\ln x} = x$ • Pour tout réel x , on a $\ln e^{x} = x$	• $\ln 1 = 0$ • $\ln e = 1$

Remarque :
La fonction exponentielle transformant une somme en produit, on peut penser que la fonction logarithme népérien qui est sa fonction réciproque, transforme un produit en somme.

2) PROPRIETES ALGEBRIQUES

Propriétés

Pour tous réels a et b strictement positifs on a :

- $\ln (a \times b) = \ln a + \ln b$
  On peut généraliser cette propriété à plusieurs nombres.
- $\ln \frac{1}{a} = - \ln a$
- $\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$
- $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln a^{n} = n \ln a$

Preuve :
Les démonstrations se font principalement en utilisant les propriétés de la fonction exponentielle.

- $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln a} \times e^{\ln b} = a \times b$. Or si $e^{y} = x$, alors $y = \ln x$. On a donc $\ln a + \ln b = \ln (a \times b)$
- $e^{- \ln a} = \frac{1}{e^{\ln a}} = \frac{1}{a}$ donc $- \ln a = \ln \frac{1}{a}$
- $e^{\ln a - \ln b} = \frac{e^{\ln a}}{e^{\ln b}} = \frac{a}{b}$ donc $\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$
- $\ln a = \ln (\sqrt{a} \times \sqrt{a}) = \ln \sqrt{a} + \ln \sqrt{a} = 2 \ln \sqrt{a}$ donc $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^{n} = a^{n}$ donc $\ln a^{n} = n \ln a$

3) ETUDE DE LA FONCTION LOGARITHME NEPERIEN

Propriété

La fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.	La croissance de la fonction ln est lente. Par exemple : $\ln (10^{8}) \approx 18{,}42$

Preuve :
Soit a et b deux réels strictement positifs tels que $a < b$.
Supposons que $\ln a \geq \ln b$
La fonction exponentielle étant croissante on aurait $e^{\ln a} \geq e^{\ln b}$ donc $a \geq b$ ce qui est en contradiction avec l'hypothèse.
On ne peut donc pas avoir $\ln a \geq \ln b$.
On a donc $\ln a < \ln b$
On en déduit que la fonction ln est strictement croissante sur] 0 ; +∞ [.

Conséquences

Pour tous réels strictement positifs a et b

- $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
- $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$
- $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$
- $a > 1 \Leftrightarrow \ln a > 0$
- si $0 < a < 1$ alors $\ln a < 0$

Propriété

La fonction ln est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln' x = \dfrac{1}{x}$

Preuve :

- Démontrons que la fonction ln est continue en 1, c'est-à-dire que $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = \ln 1$ ou aussi $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$

  Pour tout réel $\varepsilon > 0$, on a : $-\varepsilon < \ln x < \varepsilon \Leftrightarrow e^{-\varepsilon} < x < e^{\varepsilon}$

  En prenant ε "assez petit", et en remarquant que $e^{-\varepsilon} < 1 < e^{\varepsilon}$, on en déduit que $\ln x$ est aussi proche de 0 que l'on veut, lorsqu'on prend x suffisamment proche de 1 .
  On a donc $\lim\limits_{x \to 1} \ln x = 0$ et par conséquent la fonction ln est continue en 1.

- Démontrons que la fonction ln est dérivable en 1 , pour cela cherchons $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h}$

  Pour h "assez petit", posons $\ln(1+h) = H$ on a alors $1 + h = e^{H}$ et par conséquent $h = e^{H} - 1$
  La fonction ln étant continue en 1, lorsque h tend vers 0, $\ln(1+h)$ c'est-à-dire H tend vers 0.

  On a $\dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \dfrac{H - 0}{e^{H} - 1} = \dfrac{H}{e^{H} - 1}$

  Or on sait que $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{e^{H} - 1}{H} = 1$ (nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0)

  On en déduit $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{H}{e^{H} - 1} = \dfrac{1}{1} = 1$ et par conséquent $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = 1$

  La fonction ln est donc dérivable en 1 et son nombre dérivé en 1 est 1.

- Soit $a \in]0 ; +\infty[$. Démontrons que la fonction ln est dérivable en a .

  On peut écrire $\dfrac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \dfrac{\ln \dfrac{a+h}{a}}{h} = \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln\left(1 + \dfrac{h}{a}\right)}{\dfrac{h}{a}}$

  Posons $H = \dfrac{h}{a}$. On obtient alors $\dfrac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \dfrac{1}{a} \times \dfrac{\ln(1+H)}{H}$

  Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{h}{a}$ tend vers 0, et $\lim\limits_{H \to 0} \dfrac{\ln(1+H)}{H} = 1$

  Ainsi $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\ln(a+h) - \ln a}{h} = \dfrac{1}{a}$

  La fonction ln est donc dérivable en a , pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$.

  Donc ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\ln' x = \dfrac{1}{x}$

Remarque :

On sait que pour tout $x > 0$, $e^{\ln x} = x$. Ainsi en utilisant la propriété de dérivation des fonctions composées, on peut écrire pour tout $x > 0$:

$$(e^{\ln x})' = (\ln' x) \times e^{\ln x} \Leftrightarrow (x)' = (\ln' x) \times x \Leftrightarrow \ln' x = \frac{1}{x}$$

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

Preuve :

- Soit $M > 0$.
  Pour tout $x > 0$, on a : $\ln x \geq M \Leftrightarrow x \geq e^{M}$
  Ainsi, si $x \geq e^{M}$ on a $\ln x \geq M$
  Ce résultat est vrai pour tout $M > 0$. On en déduit que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$

- Pour étudier $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x$, posons $X = \dfrac{1}{x}$ c'est-à-dire $x = \dfrac{1}{X}$
  Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives X tend vers $+\infty$.
  On a $\ln x = \ln \dfrac{1}{X} = -\ln X$
  Donc $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = \lim\limits_{X \to +\infty} -\ln X$. On sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

Tableau de variations :

x	0	$+\infty$
ln	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $+\infty$

Propriétés

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$
- $\ln(1+x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0

Preuve :

- Déjà vu ! Ce résultat se retrouve facilement en utilisant la définition du nombre dérivé de la fonction ln en 1.
- L'approximation affine de $\ln(1+x)$ au voisinage de 0 est $\ln 1 + \ln' 1 \times h = 0 + h = h$

Propriétés

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$	$\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$

Au voisinage de l'infini x l'emporte sur $\ln x$.

Preuve :

- Pour déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, posons $X = \ln x$ on a alors $e^X = x$

  Lorsque x tend vers $+\infty$, $\ln x$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$.

  On peut écrire $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{e^X}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X}$.

  Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{e^X}{X} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{e^X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

- Pour déterminer $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x$, posons $X = \dfrac{1}{x}$ on a alors $x = \dfrac{1}{X}$

  Lorsque x tend vers 0 par valeurs positives, $\dfrac{1}{x}$ tend vers $+\infty$, donc X tend vers $+\infty$

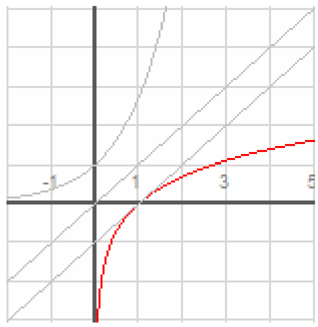
  On peut écrire $x \ln x = \dfrac{1}{X} \ln \dfrac{1}{X} = -\dfrac{1}{X} \ln X = -\dfrac{\ln X}{X}$

  Or on sait que $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{\ln X}{X} = 0$ et par conséquent $\lim\limits_{x \to 0+} x \ln x = 0$

Représentation graphique :

- On a vu que $\lim\limits_{x \to 0+} \ln x = -\infty$

La courbe de la fonction logarithme népérien a pour asymptote verticale l'axe (Oy)



- On a vu que $\ln(1+x)$ a pour approximation affine x au voisinage de 0 .

La courbe a pour tangente au point d'abscisse 1 la droite T d'équation $y = x - 1$
En étudiant $x \longmapsto \ln x - (x - 1)$, on peut justifier que la courbe se situe au-dessous de cette tangente.

- Les fonctions exponentielle et logarithme népérien étant réciproques l'une de l'autre, leurs courbes dans un repère orhtonormal sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Propriété

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I, la fonction $\ln \circ u$ qui à x associe $\ln(u(x))$ est dérivable sur I, et pour toux $x \in$ I , on a :

$$(\ln \circ u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Preuve :

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et la fonction u est dérivable et strictement positive sur I . On en déduit que la fonction $\ln \circ u$ est dérivable sur I, et pour toux $x \in$ I , on a :

$$(\ln \circ u(x))' = u'(x) \times \ln' \circ u(x) = u' \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

4) LOGARITHME DECIMAL

La fonction logarithme népérien est particulièrement intéressante du fait de sa propriété de transformation d'un produit en somme. Mais comme on utilise, pour écrire les nombres, le système décimal, on lui préfère parfois une autre fonction possédant la même propriété de transformation de produit en somme mais prenant la valeur 1 lorsque $x = 10$ (et donc la valeur 2 lorsque $x = 100$, la valeur 3 lorsque $x = 1000$ etc...)
Cette fonction sera appelée fonction logarithme décimal ou fonction logarithme de base 10.

Définition

On appelle fonction logarithme décimal et on note log la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par :

$$\log : \begin{array}{rcl}]\,0\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln 10} \end{array}$$

Propriétés

- $\log 1 = 0$ et $\log 10 = 1$
- Pour tous réels a et b strictement positifs on a :
  $\log(a \times b) = \log a + \log b$; $\log \dfrac{1}{a} = -\log a$; $\log \dfrac{a}{b} = \log a - \log b$; $\log \sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\log a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = n \log a$

Preuve :

- $\log 1 = \dfrac{\ln 1}{\ln 10} = \dfrac{0}{\ln 10} = 0$ et $\log 10 = \dfrac{\ln 10}{\ln 10} = 1$
- $\log(a \times b) = \dfrac{\ln(a \times b)}{\ln 10} = \dfrac{\ln a + \ln b}{\ln 10} = \dfrac{\ln a}{\ln 10} + \dfrac{\ln b}{\ln 10} = \log a + \log b$
- $\log \dfrac{1}{a} = \dfrac{\ln \frac{1}{a}}{\ln 10} = \dfrac{-\ln a}{\ln 10} = -\dfrac{\ln a}{\ln 10} = -\log a$
- $\log \dfrac{a}{b} = \dfrac{\ln \frac{a}{b}}{\ln 10} = \dfrac{\ln a - \ln b}{\ln 10} = \dfrac{\ln a}{\ln 10} - \dfrac{\ln b}{\ln 10} = \log a - \log b$
- $\log \sqrt{a} = \dfrac{\ln \sqrt{a}}{\ln 10} = \dfrac{\frac{1}{2}\ln a}{\ln 10} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\ln a}{\ln 10} = \dfrac{1}{2}\log a$
- Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\log a^n = \dfrac{\ln a^n}{\ln 10} = \dfrac{n \ln a}{\ln 10} = n\dfrac{\ln a}{\ln 10} = n \log a$

Remarques :

- La fonction logarithme décimal étant définie par $\log x = k \times \ln x$ avec $k = \dfrac{1}{\ln 10}$
  Il est facile d'étudier ses variations et de donner sa courbe représentative.
- Soit a un réel strictement positif tel que $a \neq 1$.
  On définit de manière analogue la fonction logarithme de base a, notée $\log_a$:

$$\log_a : \begin{array}{rcl}]\,0\,;+\infty\,[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln x}{\ln a} \end{array}$$